



TITLE:

# 無限ネットワークの非線形倉持境界(ポテンシャル論とその関連分野)

AUTHOR(S):

村上, 温; 山崎, 稀嗣

---

CITATION:

村上, 温 ...[et al]. 無限ネットワークの非線形倉持境界(ポテンシャル論とその関連分野). 数理解析研究所講究録 1997, 1016: 85-93

ISSUE DATE:

1997-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/61625>

RIGHT:

## 無限ネットワークの非線形倉持境界

広島工業大学 村上 温 (Atsushi Murakami)

島根大学 山崎稀嗣 (Maretsugu Yamasaki)

### §1. 準備

Riemann 面における倉持境界の理論 (例えば [8] など) と同様のことが無限ネットワーク上でも調和構造を導入すれば議論できることが分かっている ([3], [6]). この報告では [9] などにも参考にして, 無限ネットワーク上の倉持境界を非線形の場合に拡張させることを考える.

無限ネットワークの基本概念および記号等は [10], また, 無限ネットワーク上の非線形ポテンシャル論は主に [2], [5] に依ることとする. さらに, この報告では直接には言及しないが無限ネットワークの概念およびその上の (非線形) ポテンシャル論に関連した論文を参考文献欄に追加しておく.

$N = \{X, Y, K, r\}$  を局所有限な無限ネットワーク とする.

各  $a \in X$  と  $y \in Y$  に対して次のように置く:

$$Y(a) = \{y \in Y; K(a, y) \neq 0\},$$

$$e(y) = \{x \in X; K(x, y) \neq 0\},$$

$$X(a) = \cup \{e(y); y \in Y(a)\},$$

$$U(a) = X(a) - \{a\}.$$

また, 集合  $S$  に対して,  $L(S)$  (resp.  $L^+(S)$ ) を  $S$  上の実数値関数全体 (resp. 非負実数値関数全体) とし,  $A (\subset X)$  に対して,  $\varepsilon_A (\in L^+(X))$  を  $A$  の特性関数とする.  $A = \{a\}$  のときは  $\varepsilon_{\{a\}}$  を単に  $\varepsilon_a$  と記す.  $f$  の台は  $Sf$  で表す.

$p, q$  を正の数で  $1/p + 1/q = 1$ ,  $1 < p < \infty$  を満たすものとし,  $\phi_p(t) = |t|^{p-1} \text{sign}(t)$  とおく.

2つの関数  $w_1, w_2 \in L(Y)$  に対して

$$H_p(w_1) = \sum_{y \in Y} r(y) |w_1(y)|^p (\leq \infty),$$

意味があるとき,

$$((w_1, w_2)) = \sum_{y \in Y} r(y) w_1(y) w_2(y)$$

とおく. また,  $u \in L(X)$  に対して,

$$D_p(u) = H_p(du) = ((\phi_p(du), du)) = H_q(\phi_p(du))$$

とおく.  $D_p(u)$  は  $u$  の  $p$ -Dirichlet 和とよばれ,  $D_p(u) < \infty$  のとき,  $u$  は  $p$ -Dirichlet 有限な関数といわれる. 更に,  $u \in L(X)$  に対して,  $p$ -Laplacian とよばれる  $\Delta_p u(x) \in L(X)$  を

$$\Delta_p u(x) = \sum_{y \in Y} K(x, y) \phi_p(du(y)) \quad (x \in X)$$

で定める. ここで,  $du \in L(Y)$  は

$$du(y) = -r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x, y) u(x) \quad (y \in Y)$$

である.

注意 1. 1.  $\Delta_p u(x_0) = \sum_{y \in Y(x_0)} r(y)^{1-p} \phi_p(u(x_y) - u(x_0))$  が成立する. ここに,  $x_y$  は  $x_0$  と異なる  $y \in Y(x_0)$  の端点である. また,  $k$  が定数のとき,  $\Delta_p(ku)(x_0) = \phi_p(k) \Delta_p u(x_0)$ .

補題 1. 2.  $u, v \in L(X)$  で  $Su$  または  $Sv$  が有限集合ならば,

$$((\phi_p(du), dv)) = - \sum_{x \in X} \Delta_p u(x) v(x).$$

$u \in L(X)$  が  $A (\subset X)$  上で  $\Delta_p u(x) = 0$  (resp.  $\Delta_p u(x) \leq 0$ ) となるとき,  $u$  は  $A$  で  $p$ -調和 (resp.  $p$ -優調和) という.

注意 1. 3. 補題 1. 2 から,  $u$  が  $A$  で  $p$ -調和 (resp.  $p$ -優調和) であることと台が有限で  $X - A$  では 0 であるようなすべての  $f \in L^+(X)$  に対して,  $((\phi_p(du), df)) = 0$  (resp.  $\geq 0$ ) であることは同値であることが分かる.

補題 1. 4. 定数  $a_i > 0$  に対して,  $\mathbf{R}^{n+1}$  上の関数  $f(s; t_1, \dots, t_n) := \sum_{i=1}^n a_i \phi_p(t_i - s)$  は連続で,  $s$  (resp.  $t_i, i = 1, \dots, n$ ) に関して狭義の減少 (resp. 増加) である.

注意 1. 1 と補題 1. 4 より次のことが分かる:

系 1. 5. 1)  $u, v \in L(X)$  で  $u(x) \leq v(x)$  かつ  $u(x_0) = v(x_0)$  ならば,  $\Delta_p u(x_0) \leq \Delta_p v(x_0)$ .

2)  $u, v \in L(X)$  で  $u(x_0) \leq v(x_0)$  ならば,  $\Delta_p(u \wedge v)(x_0) \leq \Delta_p u(x_0)$ .

3) 各  $u \in L(X)$  と  $x_0 \in X$  について,  $\sum_{y \in Y(x_0)} r(y)^{1-p} \phi_p(u(x_y) - s_0) = 0$  となるような  $s_0 \in \mathbf{R}$  が唯 1 つ存在する. ここで,  $x_y$  は  $x_0$  と異なる  $y \in Y(x_0)$  の端点である. この  $s_0$  の存在により,  $x_0$  で  $s_0$  をとり,  $X - \{x_0\}$  では  $u(x)$  に一致するような関数  $u'(x)$  は  $\{x_0\}$  で  $p$ -調和であることが分かる.

この  $s_0$  を  $m_p(u; x_0)$  で表す.

系 1. 5, 2) より次のことが分かる :

命題 1. 6.  $u_1$  と  $u_2$  が共に  $A$  で  $p$ -優調和ならば,  $u_1 \wedge u_2$  もまた  $A$  で  $p$ -優調和である.

系 1. 5, 3) より次のことが分かる :

命題 1. 7.  $u \in L(X)$  を  $A$  で  $p$ -優調和な関数とする. このとき, 各  $x_0 \in A$  に対して,  $A$  で  $p$ -優調和な  $u' \in L(X)$  で  $\Delta_p u'(x_0) = 0$ ,  $u'(x_0) \leq u(x_0)$  かつ  $X - \{x_0\}$  では  $u' = u$  となるものが存在する.

このような関数  $u'$  を  $\tau_{x_0} u$  で表す.

注意 1. 1 と系 1. 5, 2) より次のことが分かる :

命題 1. 8.  $A$  を  $X$  の有限部分集合とする.  $u$  と  $-v$  が共に  $A$  で  $p$ -優調和で  $X - A$  上で  $u \geq v$  ならば,  $A$  上で従って,  $X$  上で  $u \geq v$  となる.

系 1. 9.  $A$  を  $X$  の有限部分集合とする.  $u$  と  $v$  が共に  $A$  で  $p$ -調和で  $X - A$  で  $u = v$  ならば,  $X$  上で  $u = v$  となる.

次のことも分かっている.

命題 1. 10.  $\{u_\alpha\}_\alpha$  を  $X$  の連結な部分集合  $A$  で  $p$ -優調和な正の関数の集合とする. このとき, ある点  $x_0 \in A$  で  $\{u_\alpha(x_0)\}_\alpha$  が有界ならば, 各  $x \in A$  でも  $\{u_\alpha(x)\}_\alpha$  は有界である.

関数  $u \in L(X)$  が次の条件を満たすとき,  $u$  は  $A$  で弱  $p$ -優調和といわれる :

$A$  の任意の有限部分集合  $A'$  と  $A'$  で  $p$ -調和な任意の関数  $h \in L(X)$  に対して  $X - A'$  上で  $u \geq h$  ならば  $A'$  上で  $u \geq h$  となる.

系 1. 5, 3) と命題 1. 8 より次の結果が分かる :

命題 1. 11. 関数  $u(x) \in L(X)$  が弱  $p$ -優調和であることと  $p$ -優調和であることは同じことである.

## §2. Dirichlet 原理

今後,  $X$  の有限部分集合  $A_0 (\neq \emptyset)$  を固定しておき,  $X' = X - A_0$  とおく. また,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(p), A_0} = \{u \in L(X) ; D_p(u) < \infty \text{ かつ } A_0 \text{ 上で } u = 0\}$$

とおくと、 $\mathcal{D}$  はノルム  $[D_p(\cdot)]^{1/p}$  で反射的バナッハ空間となる。

$A$  を  $X'$  の部分集合、 $\varphi \in L(X)$  とする。  $A$  上で  $\varphi$  なる値をとるような  $\mathcal{D}$  の関数全体を  $\mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi)$  で表す：

$$\mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi) = \{u \in \mathcal{D}; A \text{ 上で } u = \varphi\}.$$

このとき、 $N$  における Dirichlet 原理とは次のことをいう。

定理 2. 1.  $A$  を  $X'$  の部分集合、 $\varphi \in L(X)$  とする。  $\mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset$  ならば、関数  $h \in \mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi)$  で  $\mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi)$  に属する関数のうちで  $p$ -Dirichlet 和が最小となるものが存在し、かつ唯 1 つ存在する。この関数  $h$  は  $X' - A$  で  $p$ -調和で次式によって定められる：

$$(2.1) \quad h \in \mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi) \text{ ですべての } u \in \mathcal{D}_A^{(p)}(0) \text{ に対して, } ((\phi_p(dh), du)) = 0 \text{ となる.}$$

今後この関数  $h$  を  $\varphi_A^{(p)}$  で表す。  $\varphi_A^{(p)}$  が  $X' - A$  で  $p$ -調和であることは注意 1. 3 と (2.1) より分かる。

注意 2. 2.  $A$  が有限集合ならば、任意の  $\varphi \in L(X)$  に対して  $\mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset$ 。また、 $D_p(\varphi) < \infty$  ならば、任意の  $A (\subset X')$  に対して  $\mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset$ 。

注意 2. 3. 補題 1. 4 と系 1. 5, 3) により  $u \in L(X)$  について次のことが成り立つことが分かる： $(u_{U(a)}^{(p)})(a) = m_p(u; a)$ 。また、 $u$  が  $A (\subset X)$  で  $p$ -調和 (resp.  $p$ -優調和) であることと各  $a \in A$  に対して、 $(u_{U(a)}^{(p)})(a) = u(a)$  (resp.  $(u_{U(a)}^{(p)})(a) \leq u(a)$ ) が成り立つことは同値である。

$\varphi_A$  について次のことが分かる。

定理 2. 4.  $A, A'$  を  $X'$  の部分集合で  $A \subset A'$  とする。また、 $\varphi \in L(X)$  で  $\mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset$  とすると、

$$(\varphi_A^{(p)})_{A'} = \varphi_{A'}^{(p)}.$$

$X'$  の部分集合  $A$  に対して、 $L(A) = \{\varphi \in L(X); \mathcal{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset\}$  とおく。  $L(A)$  から  $\mathcal{D}$  への写像： $\varphi \mapsto \varphi_A^{(p)}$  は次の性質をもっている。

定理 2. 5. 1)  $\varphi \in L_A$  で  $c$  を任意の実数とする。このとき、

$$(2.2) \quad (c\varphi)_A^{(p)} = c\varphi_A^{(p)}.$$

2)  $\varphi, \psi \in L_A$  が  $A$  上で不等式  $\varphi \leq \psi$  を満たすならば、 $X$  上で不等式  $\varphi_A^{(p)} \leq \psi_A^{(p)}$  が成立する。

3) 任意の  $\varphi \in L_A$  について次の不等式が成立する :

$$(2.3) \quad \min(0, \inf_A \varphi) \leq \varphi_A^{(p)} \leq \max(0, \sup_A \varphi).$$

### §3. $p$ -倉持関数 $\tilde{g}^{(p)}$

$a \in X'$  とし, 定理 2. 1 の  $A$  として  $\{a\}$ , また,  $\varphi$  として 1 を考える. 即ち,  $1_{\{a\}}^{(p)} \in \mathscr{D}$  をつくる. 明らかに,  $1_{\{a\}}^{(p)}$  は定数ではないので  $D_p(1_{\{a\}}^{(p)}) \neq 0$ .

定義 3. 1. 次の関数  $\tilde{g}_a^{(p)} = \tilde{g}^{(p)}(\cdot, a) \in \mathscr{D}$  を  $a \in X'$  に極を持つ位数  $p$  の倉持関数 (または,  $p$ -倉持関数) という:

$$(3.1) \quad \tilde{g}_a^{(p)} = \tilde{g}^{(p)}(\cdot, a) = [D_p(1_{\{a\}}^{(p)})]^{1/(1-p)} 1_{\{a\}}^{(p)}.$$

$p$ -倉持関数に関する性質を述べる :

定理 3. 2. 1)  $X'$  上で  $\tilde{g}_a^{(p)} \leq \tilde{g}_a^{(p)}(a) = [D_p(1_{\{a\}}^{(p)})]^{1/(1-p)}$ .

2)  $X'$  上で  $\Delta_p \tilde{g}_a^{(p)} = -\varepsilon_a$ , 即ち,  $\tilde{g}_a^{(p)}$  は  $X' - \{a\}$  で  $p$ -調和で  $X'$  で  $p$ -優調和. 更に,  $a$  を含む  $X'$  の成分内で  $\tilde{g}_a^{(p)} > 0$ , それ以外の成分内では恒等的に 0 である.

3) 任意の  $u \in \mathscr{D}$  に対して,

$$(3.2) \quad ((\phi_p(d\tilde{g}_a^{(p)}), du)) = u(a).$$

4)  $p = 2$  のとき,  $f \in L(X)$  の台  $Sf$  が有限で  $S_f \subset X'$  ならば

$$(3.3) \quad f(a) = -\sum_{x \in X} \Delta_2 f(x) \tilde{g}_a^{(2)}(x).$$

$$5) \sum_{x \in A_0} \Delta_p \tilde{g}_a^{(p)}(x) = 1.$$

系 3. 3.  $\tilde{g}_a^{(p)}(b) = ((\phi_p(d\tilde{g}_b^{(p)}), d\tilde{g}_a^{(p)}))$  ( $a, b \in X'$ ).

$\tilde{g}_a^{(p)} \in \mathscr{D}$  なので  $X'$  の任意の部分集合  $A$  に対して  $(\tilde{g}_a^{(p)})_A$  を考えることができるがこれについては次のことが分かる :

定理 3. 4.  $A \subset X'$  で  $a \in A$  ならば

$$(\tilde{g}_a^{(p)})_A(x) = \tilde{g}_a^{(p)}(x) \quad (x \in X');$$

$a \notin A$  ならば,  $A$  が有限集合のときは,

$$(\tilde{g}_a^{(p)})_A(x) \leq \tilde{g}_a^{(p)}(x) \quad (x \in X').$$

この節の最後に  $A_0$  から  $\{a\}$  へのフローの概念を用いて  $\tilde{g}_a^{(p)}$  を特徴付けする. 特別な無限ネットワークの場合には, この結果を用いて  $p$ -倉持関数を簡単に求めることができる.

$w \in L(Y)$  に対して, 次のようにおく:

$$I(w; x) = \sum_{y \in Y} K(x, y)w(y).$$

$w \in L(Y)$  が次式を満たすとき,  $w \in L(Y)$  を  $A_0$  から  $\{a\}$  へのフローという:

$$I(w) := -\sum_{x \in A_0} I(w; x) = I(w; a);$$

$x \in X' - \{a\}$  に対しては

$$I(w; x) = 0.$$

$F(A_0, \{a\})$  で  $A_0$  から  $\{a\}$  へのフロー全体の集合を表し,  $F_q(A_0, \{a\})$  を  $\{w \in F(A_0, \{a\}); Sw \text{ は有限}\}$  のバナッハ空間  $L_q(Y; r) := \{w \in L(Y); H_q(w) < \infty\}$  における閉包とする. ここで,  $L_q(Y; r)$  のノルムは  $[H_q(\cdot)]^{1/q}$  で定める.

2点  $x, x' \in X$  に対して,  $x$  から  $x'$  へのパス  $P$  を  $(C_X(P), C_Y(P), p)$  で表す. 但し,  $X$  の有限順序集合  $C_X(P) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $Y$  の有限順序集合  $C_Y(P) = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  とパス指標と呼ばれる関数  $p \in L(Y)$  は次の条件を満たす:

$$x_0 = x, x_n = x', x_i \neq x_j \quad (i \neq j);$$

$$\{x \in X; K(x, y_i) \neq 0\} = \{x_{i-1}, x_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$p(y) = 0 \quad (y \notin C_Y(P)), p(y_i) = -K(x_{i-1}, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

次の極値問題を考える:

$$(3.4) \quad e_a^{(q)} = \inf\{H(w); w \in F_q(A_0, \{a\}) \text{ かつ } I(w) = 1\}.$$

極値問題 (3.4) には最適解  $\hat{w}$  が唯1つ存在することが知られている (c. f. [7], p.107). この解  $\hat{w}$  を用いて関数  $v_{x'} \in L(X)$  を次のようにおく:

$$v_{x'}(x') = 0, v_{x'}(x) = \sum_{y \in Y} r(y)p(y)\phi_q(\hat{w}(y)) \quad (x \neq x'),$$

但し,  $p(y)$  は  $x'$  から  $x$  へのパス  $P$  のパス指標である. この関数はパス  $P$  の取り方によらないことも分かっている.

定理 3. 5.  $\tilde{g}_a^{(p)}$  は次式で与えられる:

$$\tilde{g}_a^{(p)}(x) = \min\{|v_{x'}(x)|; x' \in A_0\}.$$

更に,

$$\tilde{g}_a^{(p)}(a) = e_a^{(q)}.$$

注意 3. 6. [3] の Examples 3.1, 3.2, 3.3 における無限ネットワーク上の  $p$ -倉持関数は線形の場合の [3] の倉持関数に一致する. 今のところ, 本質的に非線形である  $p$ -倉持関数の例は得ていない.

#### §4. $p$ -倉持境界の定義

先ず, 次のことを示す:

定理 4. 1.  $\{\tilde{g}_a^{(p)}(x)\}_{a \in X'}$  は各  $x \in X'$  を固定することに有界である.

証明.  $x \in X'$  はある  $x_0 \in A_0$  と  $y_0 \in Y$  で  $K(x, y_0)K(x_0, y_0) = -1$  なる式を満たしているものとする. このとき,  $A_0$  上で  $\Delta_p \tilde{g}_a^{(p)} \geq 0$  なので, 定理 3. 2, 5) により

$$\begin{aligned} 1 &\geq \Delta_p \tilde{g}_a^{(p)}(x_0) = \sum_{y \in Y(x_0)} r(y)^{1-p} \phi_p(\tilde{g}_a^{(p)}(x_y) - \tilde{g}_a^{(p)}(x_0)) \\ &= \sum_{y \in Y(x_0)} r(y)^{1-p} \phi_p(\tilde{g}_a^{(p)}(x_y)) \geq r(y_0)^{1-p} |\tilde{g}_a^{(p)}(x)|^{p-1}. \end{aligned}$$

ここで,  $x_y$  は  $x_0$  と異なる  $y$  の端点である. このことから  $\{\tilde{g}_a^{(p)}(x)\}_{a \in X'}$  が有界であることが分かる. 故に命題 1. 10 により  $\{\tilde{g}_a^{(p)}\}_{a \in X'}$  は  $x$  を含む成分で有界, 従って, 結論を得る.

以下では  $\tilde{g}_a^{(p)}(x)$  の代わりに  $\tilde{g}^{(p)}(x, a)$  を用いる.

$X'$  内の点列  $\{x_j\}$  が次のことを満たすとき, この点列は  $N$  の境界に収束するという:

$X'$  の任意の有限部分集合  $A$  に対して番号  $j_0$  が存在し,  $j \geq j_0$  となるようなすべての  $j$  に対して  $x_j \notin A$  となる.

$N$  の境界に収束する  $\{x_j\}$  に対して, 定理 4. 1 により  $\{\tilde{g}^{(p)}(x, x_j)\}_j$  は各  $x \in X'$  について有界だから  $\{\tilde{g}^{(p)}(\cdot, x_j)\}$  は収束する部分列をもつ.  $\{\tilde{g}^{(p)}(\cdot, x_j)\}$  が収束するとき,  $\{x_j\}$  は基本列であるといい, また, 2つの基本列の極限関数が等しいとき, この2つの基本列は同値という. 基本列全体の同値類の各を  $N$  の  $p$ -倉持境界点という.  $N$  の  $p$ -倉持境



界点の全体を  $N$  の  $p$ -倉持境界といい,  $\partial_p N$  で表す.  $x \in X$ ,  $z \in \partial_p N$  で  $\{x_j\}$  in  $X'$  を  $z$  を決定する基本列とすると,  $\tilde{g}^{(p)}(x, z) = \tilde{g}_z^{(p)}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{g}^{(p)}(x, x_j)$  とおくがこの関数は基本列  $\{x_j\}$  の取り方によらない. 明らかに,  $x \in A_0$  のとき,  $\tilde{g}^{(p)}(x, z) = 0$  となり,  $\tilde{g}^{(p)}(\cdot, z)$  は  $X'$  で調和である. 定理 3. 2, 5) より, すべての  $z \in \partial N$  に対して,  $\sum_{x \in A_0} \Delta \tilde{g}^{(p)}(x, z) = 1$  となる.

線形の場合と同様にして,  $p$ -倉持関数を用いて  $\widetilde{X} := X' \cup \partial_p N$  に距離関数  $d^{(p)}$  を定義することができる:

$$(4.1) \quad d^{(p)}(x_1, x_2) := \sum_{x \in X'} \alpha(x) \frac{|\tilde{g}^{(p)}(x, x_1) - \tilde{g}^{(p)}(x, x_2)|}{1 + |\tilde{g}^{(p)}(x, x_1) - \tilde{g}^{(p)}(x, x_2)|} \quad (x_1, x_2 \in \widetilde{X}).$$

ここに,  $\alpha(x) \in L^+(X')$  は正の値をとり,  $\sum_{x \in X'} \alpha(x) < \infty$  を満たすものである.

この距離関数により定まる位相で  $\widetilde{X}$  はコンパクト位相空間となり,  $X'$  上ではもとの離散位相に一致することが分かる.

#### 参考文献

- [1] T. Kayano and M. Yamasaki: Boundary limit of discrete Dirichlet potentials, Hiroshima Math. J., **14**(1984), 401-406.
- [2] F-M. Maeda: Non-linear classification of infinite networks, Manuscript(1976), 1-27.
- [3] A. Murakami: Kuramochi boundaries of infinite networks and extremal problems, Hiroshima Math. J., **24**(1994), 243-256.
- [4] A. Murakami and M. Yamasaki: Extremal problems with respect to ideal boundary components of an infinite network, Hiroshima Math. J., **19**(1989), 77-87.
- [5] A. Murakami and M. Yamasaki: Nonlinear potentials on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **26**(1992), 15-28.
- [6] A. Murakami and M. Yamasaki: An introduction of Kuramochi boundary of an infinite network, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Series B: Mathematical Science **30**(1997), 57-89.
- [7] T. Nakamura and M. Yamasaki: Generalized extremal length of an infinite network, Hiroshima Math. J., **6**(1976), 95-111.
- [8] M. Ohtsuka: An elementary introduction of Kuramochi boundary, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I Math., **28**(1964), 271-299.
- [9] H. Tanaka: Kuramochi boundaries of Riemannian manifolds, in Potential Theory (ed. by M.Kishi), 321-329. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992

- [10] M. Yamasaki: Extremum problems on an infinite network, Hiroshima Math. J., **5**(1975), 223–250.
- [11] M. Yamasaki: Discrete potentials on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., **13**(1979), 31–44.
- [12] M. Yamasaki: Ideal boundary limit of discrete Dirichlet functions, Hiroshima Math. J., **16**(1986), 353–360.